ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ÉCOLE EUROPÉENNE DES AFFAIRES
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION DE 1993

Mathématiques II

OPTIONS ÉCONOMIQUE ET TECHNOLOGIQUE

lundi 17 mai 1993, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sont autorisées:

- Règles graduées.
- Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

AVERTISSEMENT : • Les passages entre [...] ne figurent qu'en voie économique (et technol...
• La Partie V ne figure qu'en voie générale

Partie I

1. *a*) Calculer $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$

b) En déduire que : $e^{-1} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$

2. *a*) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n :

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u}\, du$$

[On procédera par récurrence sur n, en utlisant une intégration par parties.]

b) Établir l'encadrement : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u}\, du \leq \frac{1}{n!}$

c) En conclure que :

$$e^{-1} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Dans toute la suite du problème, on désigne par N un nombre entier naturel non nul.

Partie II

On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N : B_1, B_2,..., B_N. On effectue N tirages *avec remise*, en supposant l'équiprobabilité des résultats. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et N, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la boule B_i sort lors du i ième tirage et la valeur 0 dans le cas contraire. On pose :

$$S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

1. Déterminer l'espérance de X_i ; en déduire celle de S_N.

2. Pour tout nombre entier naturel k, on note $p(N, k)$ la probabilité de l'événement $S_N = k$.

a) Montrer que $p(N, k) = 0$ lorsque $k > N$ et que :

$$p(N, k) = C_N^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k} \frac{1}{N^k} \quad \text{si} \quad 0 \leq k \leq N$$

b) Le nombre entier naturel k étant fixé, déterminer la limite de $p(N, k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.
[On commencera par traiter les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$.]

Partie III

On considère un ensemble E_N à N éléments. Soit s une permutation de E_N, c'est-à-dire une bijection de E_N sur lui-même. On appelle point fixe de s tout élément a de E_N tel que $s(a) = a$.

Pour tout nombre entier p tel que $0 \leq p \leq N$, on note $F(N, p)$ le nombre de permutations de E_N qui ont exactement p point fixes. On convient que $F(0, 0) = 1$.

1. *a*) Montrer que $F(N, N) = 1$ et $F(N, N-1) = 0$

b) Montrer que $\sum_{k=0}^{N} F(N, k) = N!$

2. On pose $\omega_N = F(N, 0)$. Ainsi, ω_N est le nombre de permutations de E_N qui n'ont aucun point fixe. On convient que $\omega_0 = 1$.

a) Montrer que, pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq N$:

$$F(N, k) = C_N^k \, \omega_{N-k}$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \frac{\omega_{N-k}}{(N-k)!} = 1$$

c) En raisonnant par récurrence, établir la relation :

$$\frac{\omega_N}{N!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}$$

d) Déterminer la limite de $\frac{\omega_N}{N!}$ lorsque N tend vers $+\infty$.

On suppose désormais $N \geq 2$.

Partie IV

On considère à nouveau une urne contenant N boules numérotées de 1 à N : $B_1, B_2, \ldots, B_N$. On effectue N tirages aléatoires, cette fois *sans remise*. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et N, on note Y_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la boule B_i sort lors du $i^{\text{ième}}$ tirage et la valeur 0 dans le cas contraire.

1. *a*) Déterminer l'espérance de Y_i et celle de $Y_i Y_j$, où $1 \leq i < j \leq N$.

b) Déterminer la covariance de Y_i et Y_j, où $1 \leq i < j \leq N$.

c) Les variables aléatoires Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?

2. On pose $T_N = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$

Déterminer l'espérance et la variance de T_N.

3. Pour tout nombre entier naturel k, on note $q(N, k)$ la probabilité de l'événement $T_N = k$.

a) Calculer $q(N, k)$ lorsque $k > N$. Montrer que :

$$q(N, k) = \frac{\omega_{N-k}}{k!(N-k)!} \quad \text{si} \quad k \leq N$$

b) Le nombre entier naturel k étant fixé, déterminer la limite de $q(N, k)$ lorsque N tend vers $+\infty$. Comparer ce résultat à celui de la question II.2 *b*).

Partie V

1. À l'aide de la relation établie dans la question III.2 *c*), montrer que, pour tout nombre entier naturel $n \geq 2$:

$$\omega_n = (n-1)(\omega_{n-1} + \omega_{n-2})$$

2. Pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq N$, on pose :

$$\bar{q}(N, k) = q(N, N-k)$$

a) Calculer $\bar{q}(N, 0)$ et $\bar{q}(N, 1)$.

b) Pour $2 \leq k \leq N$, exprimer $\bar{q}(N, k)$ en fonction de $\bar{q}(N, k-1)$ et de $\bar{q}(N, k-2)$.

3. Écrire un algorithme prenant N comme donnée et construisant la liste des valeurs de $\bar{q}(N, k)$, k variant de 0 à N. On s'attachera à minimiser le nombre d'opérations.